MEDEDELING

FINALE NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE

Op vrijdag 15 september vindt op de Technische Universiteit Eindhoven de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. Hiervoor zijn 162 leerlingen uitgenodigd uit de categorieën zesde klas, vijfde klas en vierde klas of lager. Zij krijgen in drie uur tijd vijf pittige opgaven voor hun kiezen.
Voor docenten die meegaan naar de finale is er tijdens de wedstrijd een onderhoudende lezing.
Vanaf maandag 18 september vindt u de opgaven (en uitwerkingen) van de finale op www.wiskundeolympiade.nl.
De vijftien prijswinnaars (vijf uit elk van de drie categorieën) worden 10 november bekend gemaakt tijdens de prijsuitreiking.

VOETBALLERS SELECTEREN

OLYMPIADEOPGAVE RIO

Lammert Westerdijk

In juli 2017 vond in Rio de Janeiro, Brazilië, de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Het Nederlands team werd hier 18e van de 111 deelnemende landen. Lammert Westerdijk (16, toen nog 5 vwo) kreeg de kans om als extra leerling mee te gaan en wist maar liefst drie van de zes opgaven volledig op te lossen. In dit artikel neemt hij de lezer mee op zijn ontdekkingstocht naar de oplossing van opgave 5.

figuur 1 Team NL met v.l.n.r: Lammert Westerdijk, Gabriel Visser, Wietze Koops, Levi van de Pol, Ward van der Schoot, Nils van de Berg en Matthijs van der Poel

Mee naar Brazilië

Sinds de vierde klas neem ik met dertig andere middelbare scholieren deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade, nadat ik als derdeklasser met succes aan de eerste ronde had meegedaan. Afgelopen schooljaar was dus mijn tweede jaar in deze trainingsgroep, en nadat ik bij de Benelux Mathematical Olympiad in Namen (België) als enige van de tien Nederlandse deelnemers geen medaille had gehaald, was mijn kans om mee te gaan naar de International Mathematical Olympiad (IMO) in Brazilië vrijwel nihil; althans, dat dacht ik. Ook tijdens de drie selectietoetsen in juni had ik niet het gevoel dat het heel goed ging en ik was dan ook ontzettend verrast toen mijn naam bij de bekendmaking van het team werd genoemd. Ik had de aanmoedigingsprijs[1] gewonnen: ik zou niet officieel meedoen aan de wedstrijd, maar aan alle andere

activiteiten, waaronder de trainingsweek in Brazilië, zou ik wel samen met de zes teamleden deelnemen. Toen ik drie weken later in het vliegtuig naar Brazilië zat, was het eigenlijk nog steeds niet helemaal tot me doorgedrongen wat ik had bereikt: ik ging naar de IMO, het hoogste niveau wiskundewedstrijd dat een middelbare scholier kan bereiken.
Na een week van veel trainen in Rio de Janeiro, begon de IMO. Naast de vele excursies was er natuurlijk ook de echte wedstrijd. Verdeeld over de twee wedstrijddagen van elk 4,5 uur hadden de deelnemers in totaal zes opgaven om op te lossen. Aangezien ik niet mee mocht doen aan de wedstrijd zelf, moest ik wachten tot de wedstrijd was afgelopen om zelf aan de opgaven te werken. Hierna bespreek ik een van de opgaven.

Opgave 5

Zij gegeven een geheel getal $N \geq 2$. Een groep van $N(N + 1)$ voetballers, allemaal van verschillende lengte, staat op een rij. De bondscoach wil $N(N - 1)$ voetballers uit deze rij verwijderen zodat een rij van $2N$ voetballers overblijft die aan de volgende N voorwaarden voldoet:

(1) Er staat niemand tussen de twee langste voetballers.
(2) Er staat niemand tussen de op twee na langste en de op drie na langste voetballer.
(3) Er staat niemand tussen de op vier na langste en de op vijf na langste voetballer.
⋮
(N) Er staat niemand tussen de twee kortste voetballers.

Bewijs dat dit altijd mogelijk is.

'Kleine gevallen'

Hoe pak je nu zo'n opgave aan? Het eerste dat alle trainingsdeelnemers leren, is het kijken naar *kleine gevalletjes*; hierbij probeer je de variabelen in het probleem te vervangen door een aantal kleine getallen. Hierdoor krijg je een beter begrip van de opgave en misschien vind je een oplossing die gemakkelijk naar alle mogelijke waarden voor diezelfde variabele is uit te breiden. In dit geval is N de enige variabele in de opgave; laten we hier een klein getal voor invullen. De opgave specificeert dat N minstens 2 moet zijn, dus laten we dat proberen.
Als we $N = 2$ invullen, bestaat de groep voetballers dus uit zes voetballers en wil de bondscoach twee spelers verwijderen, zodat er niemand tussen de twee langste voetballers en niemand tussen de op twee na langste en de op drie na langste voetballer, oftewel de twee kortste voetballers staat. We merken echter al gauw op dat de zes voetballers op 720 manieren in een rij kunnen gaan staan. Het is ondoenlijk om al deze gevallen als *kleine gevalletjes* af te gaan, dus we moeten iets handigers bedenken. Pogingen om met volledige inductie of uit het ongerijmde een bewijs te leveren stranden. We zullen dus wederom iets anders moeten proberen.

Constructie

Om te bewijzen dat iets altijd mogelijk is, kan het handig zijn om een constructie te geven: een manier waarop de coach altijd $2N$ spelers kan kiezen die aan de voorwaarden voldoen. Door nog een aantal kleine gevalletjes uit te proberen, lijkt ook bij deze aanpak een addertje onder het gras verborgen te liggen. De constructie moet namelijk iets over de lengtes van de spelers in de selectie van de coach zeggen, maar ook iets over de posities van de spelers, want volgens de voorwaarden doen zowel de positie als de lengte van een speler ertoe. Toch blijkt dit probleem hier oplosbaar. Het cruciale idee daarbij is het opdelen van de rij van $N(N + 1)$ voetballers in N rijtjes met elk $N + 1$ spelers. Als we nu elk van de paren die genoemd worden in de voorwaarden in een van deze N rijtjes kunnen plaatsen, zodat in elk rijtje precies één paar staat, hebben we in totaal $2N$ spelers, waarvan de twee langste spelers in een ander rijtje staan dan de andere $2N - 2$ voetballers, de op twee na langste en de op drie na langste voetballer ook in een ander rijtje dan de andere $2N - 2$ voetballers, en zo door tot en met de twee kortste voetballers. Omdat al deze paren in een ander rijtje staan, kan er geen andere voetballer tussen twee spelers uit een paar staan; dan zou deze voetballer namelijk in hetzelfde rijtje staan als de twee spelers uit dit paar, in tegenspraak met het feit dat alle paren in een ander rijtje staan.

Op een idee komen

Hoe kom je nu op zo'n idee? Allereerst hebben alle trainingsdeelnemers al ontzettend veel van dit soort opgaven gemaakt en dat helpt natuurlijk veel bij het krijgen van zo'n idee. Maar ook zonder jaren aan training kan iemand op dit idee komen; ik zal proberen uit te leggen hoe. Als je de opgave leest, zie je al in de opgave $N(N + 1)$ staan. Dit moet je natuurlijk ergens in je bewijs gebruiken, dus het is handig om alvast na te denken hoe je dit zou kunnen gebruiken. Daarnaast zie je door veel rijtjes te proberen en door het zoeken van een constructie, dat het feit dat je iets over de positie én de lengte van

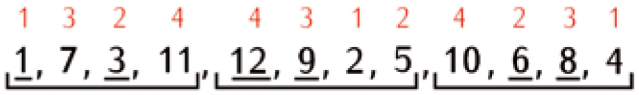
> 'TIJDENS DE IMO HEB IK DOOR SNEL IN TE ZIEN DAT DINGEN NIET GINGEN WERKEN UITEINDELIJK EEN OPLOSSING GEVONDEN.'

de spelers uit de selectie van $2N$ spelers wilt weten, voor een probleem zorgt; het zou fijn zijn als je één van deze twee dingen uit zou kunnen sluiten, zodat je bijvoorbeeld alleen nog maar iets over de lengtes van de spelers hoeft te zeggen. Als laatste impliceert de formulering van de voorwaarden eigenlijk al het kijken naar paren van spelers. Als je deze drie dingen combineert, kom je al gauw op het slimme idee om de rij voetballers op te delen in kleinere rijtjes.Het opdelen van de rij in kleinere rijtjes is een leuk idee, maar we hebben nu nog geen bewijs; we moeten nog laten zien dat we de paren voetballers, gebaseerd op hun lengte, altijd in verschillende groepen in kunnen delen. Op dit punt kan het bewijs op verschillende manieren af worden gemaakt; ik zal hier de manier laten zien die ik tijdens de IMO ook heb gebruikt.

Tegenvoorbeelden

Om een constructie te vinden, heb ik een methode gebruikt die ik tijdens de trainingsweek in Brazilië heb geleerd. Hierbij bedenk ik een mogelijke strategie en probeer ik dan een tegenvoorbeeld voor die strategie te vinden. Op het moment dat het niet meer lukt om een tegenvoorbeeld te geven, is het goed mogelijk dat dit een juiste strategie is. Mijn eerste idee was bijvoorbeeld om de eerste twee spelers te kiezen als de langste twee spelers uit het rijtje met de langste speler.
Een tegenvoorbeeld was gemakkelijk te vinden; dit ging dus niet werken. Het vinden van een tegenvoorbeeld gaf me echter wel nieuwe ideeën. Ik zag namelijk in dat de op een na langste speler uit het rijtje met de langste speler relatief gezien nogal kort kon zijn, wat voor problemen zorgde. Door steeds nieuwe dingen te proberen en tegenvoorbeelden te zoeken, lukte het mij uiteindelijk om een constructie te bedenken waarbij ik geen tegenvoorbeeld meer kon vinden.

Algemene constructie



figuur 2

In figuur 2 is mijn gevonden constructie voor een rijtje voetballers met $N = 3$ te zien, waarbij de voetballers van kort (speler 1) naar lang (speler 12) genummerd zijn. Ook heb ik de voetballers in de drie rijtjes van vier, zoals die hierboven zijn gedefinieerd, van kort naar lang genummerd; dit zijn de getallen in het rood boven de 'spelers'. De onderstreepte getallen zijn de uiteindelijk gekozen spelers. De algemene constructie werkt nu als volgt:

Stap 1: Kijk naar de op één na langste spelers uit elk van de N rijtjes met $N + 1$ spelers. Kies hiervan de langste en kies ook de langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

Stap 2: Kijk naar de op twee na langste spelers uit elk van de $N - 1$ rijtjes met $N + 1$ spelers waaruit nog geen spelers zijn geselecteerd. Kies hiervan de langste en kies ook de op één na langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

En in het algemeen:

Stap k: Kijk naar de op k na langste spelers uit elk van de $N - k + 1$ rijtjes met $N + 1$ spelers waaruit nog geen spelers zijn geselecteerd. Kies hiervan de langste en kies ook de op $k - 1$ na langste speler uit hetzelfde rijtje. Kijk in de volgende stappen niet meer naar de spelers uit dit rijtje.

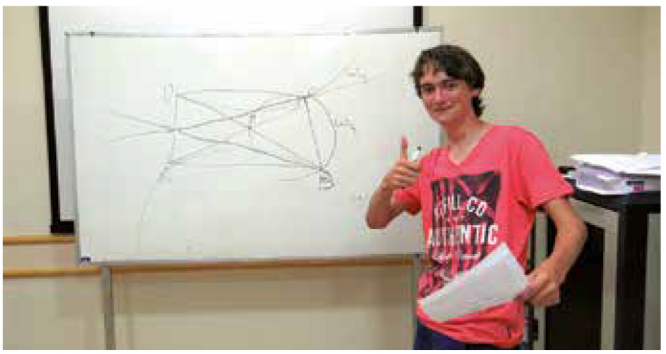
Het algoritme ziet er voor het voorbeeld in figuur 2 dus als volgt uit:

Stap 1: We kijken naar de spelers onder de rode drieën; de langste hiervan is speler 9. Ook kiezen we nu dus de speler onder de rode vier uit hetzelfde rijtje; dat is speler 12.

Stap 2: Nu kijken we naar de spelers onder de rode tweeën uit de rijtjes waarvan we nog geen spelers hebben gekozen, dus het eerste en het derde rijtje. De langste hiervan is speler 6. Ook kiezen we nu dus de speler onder de rode drie uit hetzelfde rijtje; dat is speler 8.

Stap 3: Tot slot kijken we naar de speler onder de rode een uit het eerste rijtje; we hebben namelijk al spelers uit beide andere rijtjes gekozen. Dit gaat om speler 1. Nu kiezen we ook nog de speler onder de rode twee uit hetzelfde rijtje; dat is speler 3.

We hebben nu zes spelers gekozen die aan de voorwaarden voldoen. Het is nu eigenlijk duidelijk dat deze strategie altijd gaat werken; op een wedstrijd zou je dit nog wel volledig wiskundig moeten uitwerken.



figuur 3 Lammert Westerdijk

Lastig begin

Het is bij deze opgave vrij lastig om een begin te maken: kleine gevalletjes gaan moeilijk en het is moeilijk een goede strategie te vinden. Het idee om de rij voetballers op te delen in N kleinere rijtjes blijkt de sleutel tot de oplossing te zijn; daarna is de opgave goed te doen. Het krijgen van dit idee en een goede strategie zoeken zijn de echte hindernissen van deze opgave. Tijdens de IMO heb ik door snel in te zien dat dingen niet gingen werken uiteindelijk een oplossing gevonden. Daarmee heb ik zeven (officieuze) punten op deze opgave behaald. Op de andere vijf opgaven heb ik in totaal nog veertien (officieuze) punten verdiend door het volledig oplossen van twee andere opgaven. Volgens de begeleiders mag ik zeer trots zijn op het kraken van drie van de zes opgaven. Verder heb ik erg veel leuke herinneringen overgehouden aan de IMO en erg veel meegemaakt. Ik ga zeker mijn best doen om er volgend jaar in Roemenië weer bij te zijn!

Noot

[1] De aanmoedigingsprijs is bestemd voor een jong aanstormend talent en wordt beschikbaar gesteld door het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Over de auteur

Lammert Westerdijk (16 jaar) neemt sinds schooljaar 2015/16 deel aan het trainingsprogramma van de Wiskunde Olympiade. Lammert zit in klas 6 vwo van het Stedelijk Gymnasium Leeuwarden.
E-mailadres: *145008@pj.nl*